Risoluzione ai minimi quadrati

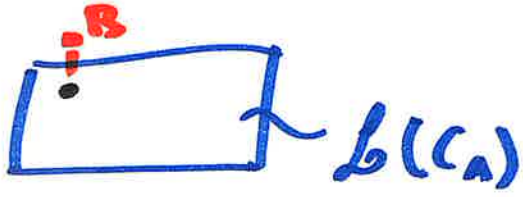
$AX = B$ è compatibile? Sì → risolvere.

→ TROVARE SOL. PARTICOLARE + BASE $\ker(A)$.

se non è compatibile. → $B \notin \mathcal{L}(C_A)$

NON ESISTE SOL.

In generale ha senso provare a chiedersi se
$\exists$ un sistema lineare "vicino" a quello dato che
ammetta soluzione.



Invece che risolvere $AX = B$ risolviamo
$AX = B'$ ove B' = vettore in
$\mathcal{L}(C_A)$ più vicino a B.

(x_i, y_i)

tempo

posizione misurata.

Trovare polinomio f tale che

$f(x_i) \approx y_i \quad \forall i$ con

$\deg f$ piccolo.

$$y_1 = f(x_1) = \overbrace{a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x^n}^{n+1 \text{ incognite}}$$

$$y_2 = f(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + \dots a_n x^n$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{y_m}_{\text{termini noti}} = f(x_m) = a_0 + a_1 x_m + \dots + a_n x_m^n$$

Idea: proiettare B su $\mathcal{L}(C_A)$

$$\pi : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$$

invece che $AX = B$ risolviamo $AX = \pi(B)$

CASO PARTICOLARE: distanza euclidea

$$\|\cdot\|_2 : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}.$$

$\Rightarrow \pi(B)$ = proiezione ortogonale.

Supponiamo di saper risolvere

$AX = \pi(B)$ e che X_0 sia una

sua soluzione $\Rightarrow$ $AX_0 = \pi(B)$ è vera che

$(AX_0 - B) = \pi(B) - B$ è ortog. ad A

ortogonale alle <u>colonne</u> di A

$$\Rightarrow {}^tA(AX_0 - B) = \begin{bmatrix} {}^tC_1 \cdot (AX_0 - B) \\ \vdots \\ C_n \cdot (AX_0 - B) \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$\Leftrightarrow$ X_0 soluzione di $AX = \pi(B)$

$$\downarrow$$

$${}^tAAX_0 = {}^tAB \qquad (*)$$

ed ancora risolve $(*)'$

$$\boxed{{}^tAAX = {}^tAB}$$ sistema dei minimi quadrati.

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$${}^{T}AB = 3+2+1 \qquad {}^{T}AA = 3$$

$$({}^{T}AA)X = {}^{T}AB$$

$$\rightarrow \quad 3x = 6 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

soluzione ai minimi quadrati

$x=1$
$x=2$
$x=3$

in $\|\cdot\|_\infty$

devo trovare $B' \in \mathbb{Z}((111))$

tale che $\|(123)-x(111)\|_\infty$ sia

minima cioè tale che

$\sup(|(1-x)|,|(2-x)|,|(3-x)|)$ sia

il più piccolo possibile.

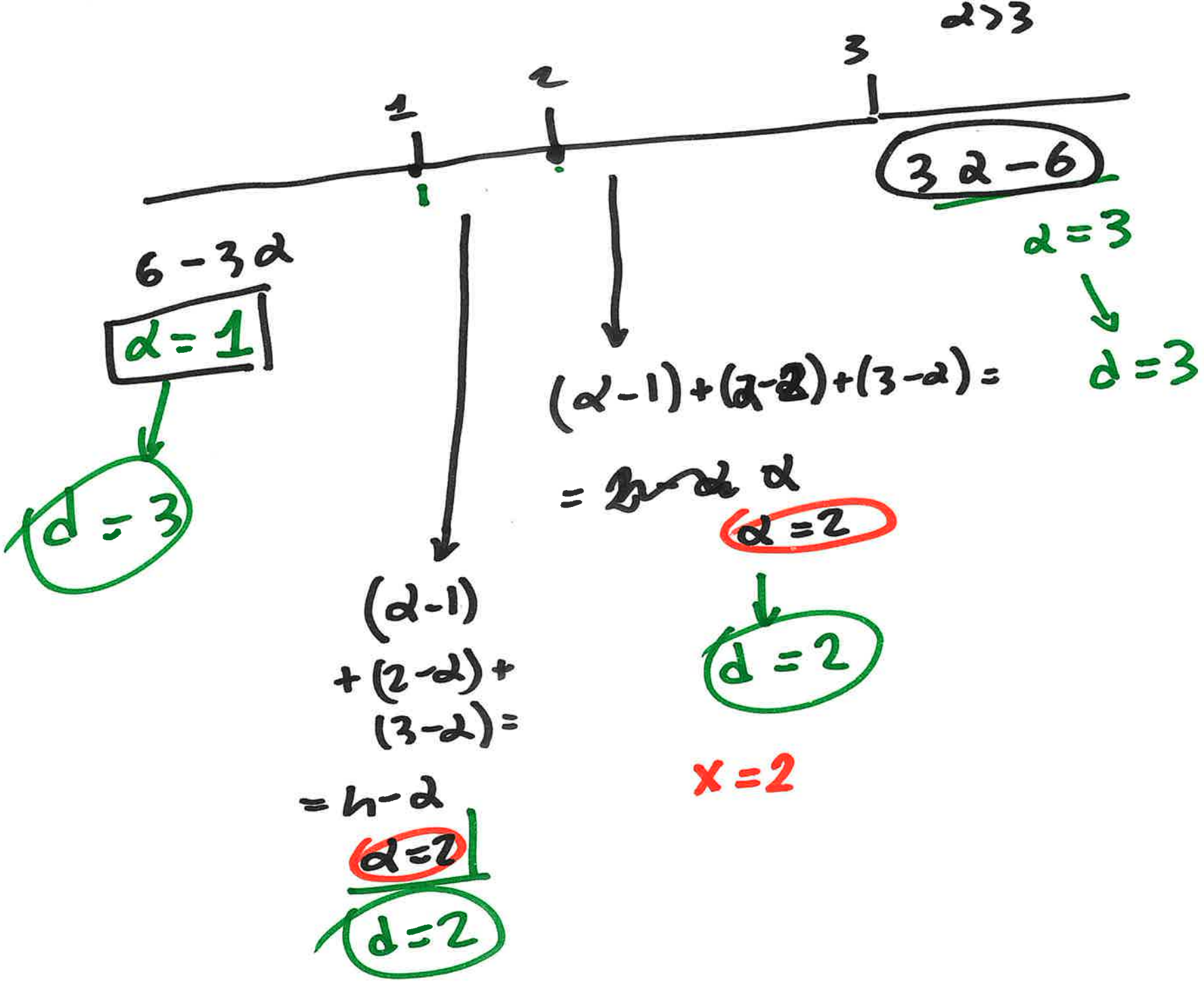
$x=2$ $\quad x=2$

$\|\cdot\|_1$: $\quad |1-\alpha|+|2-\alpha|+|3-\alpha|$ minimo.

$\alpha>3$ $\quad 3\alpha-6 \Rightarrow \alpha=3 \quad \alpha=3$

$3>\alpha>2$ $\quad \alpha \Rightarrow \alpha=2$

$\alpha-1+\alpha-2+3-\alpha \Rightarrow \alpha=\alpha$


α>3
3
2
1
1
3 α -6
α = 3
d = 3
6 - 3α
α = 1
d = 3
(α-1)+(2-α)+(3-α)=
= 2-α α
α = 2
d = 2
x = 2
(α-1)
+(2-α)+
(3-α)=
= 4-α
α=2
d=2

$x=0$

$x=1$

$x=5$

$\| \|_2 : \to x = 2$

$\| \|_\infty : x = \frac{5}{2}$

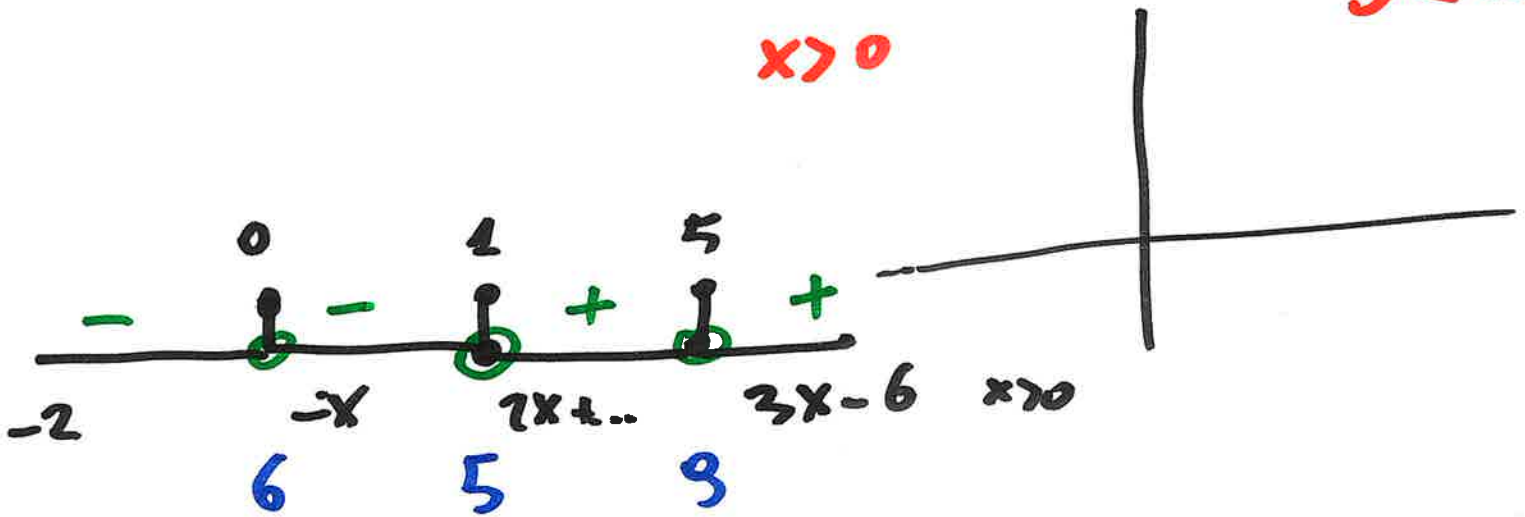
$\| \|_1 : x = 1$

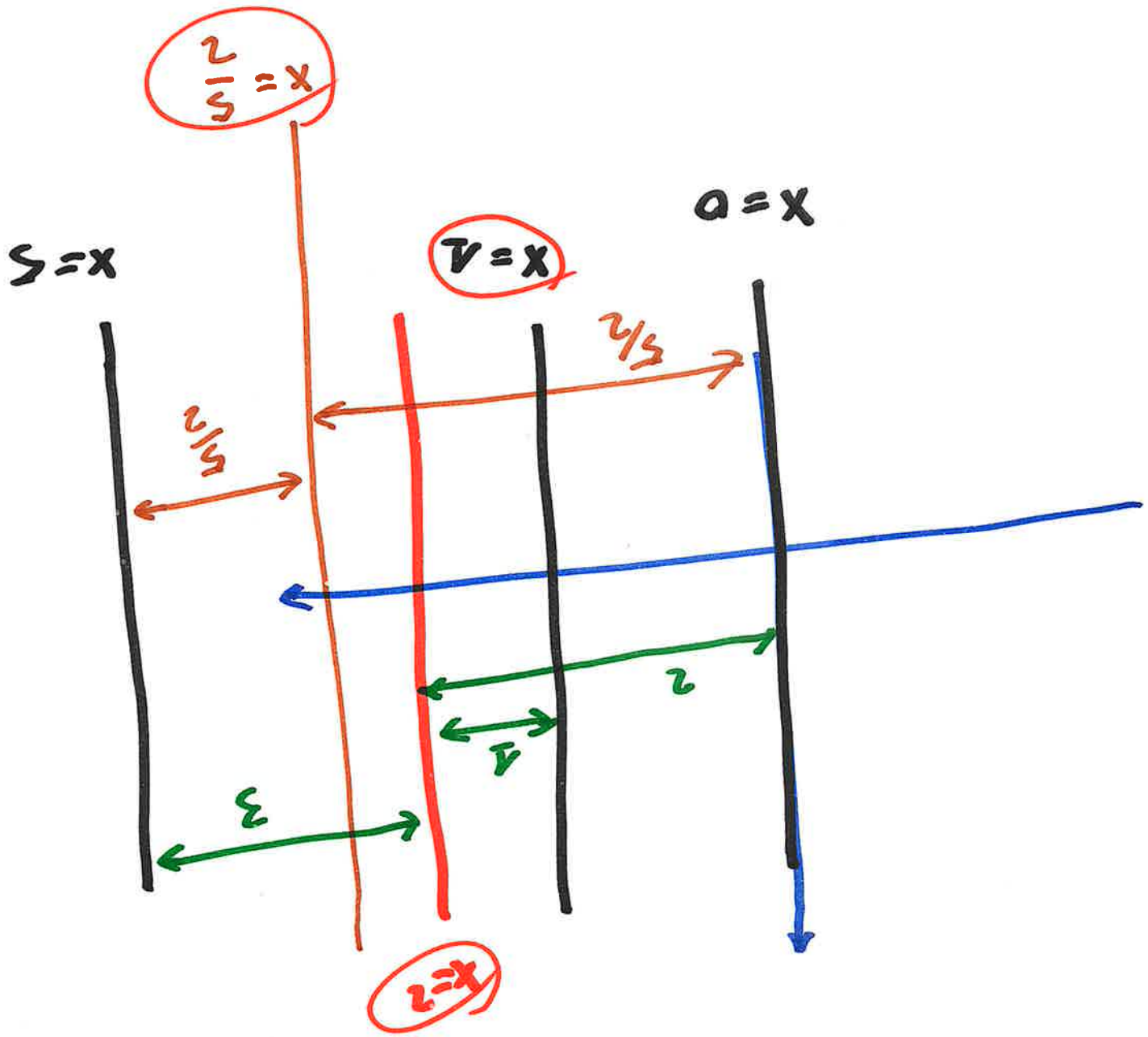
$$\sup\left(|x-0| + |x-1| + |x-5|\right)$$

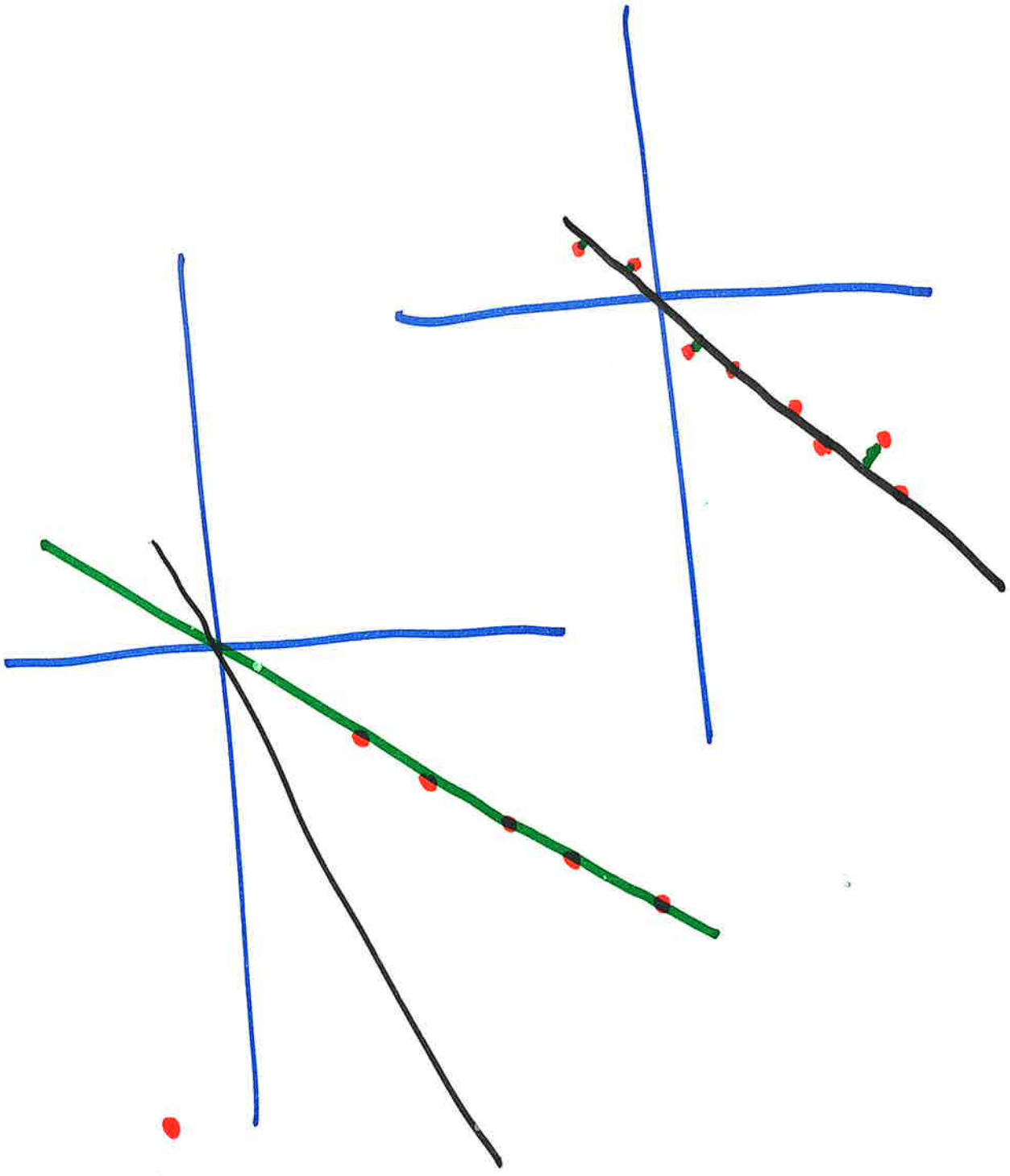
$$\min\left(|x|, |x-1|, |x-5|\right)$$

$0 < x < 5$

$x > 0$




2/5 = x
5 = x
4 = x
a = x
2/5
2/5
2
4
3
x = 2



$(\mathbb{K}, +, \cdot)$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ campo complesso.

$\sqrt{-a} = i\sqrt{|a|} \quad a \in \mathbb{R}$

$z = a + ib$

$\mathbb{C} := \mathbb{R}(i) \quad$ ove $\quad i^2 + 1 = 0$

$$\mathbb{R}^{2,2} = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\mathbb{1} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C} := \mathcal{L}(\mathbb{1}, i)$$

$$\alpha \mathbb{1} + \beta i \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

<u>OSS</u> $\det(\alpha \mathbb{1} + \beta i) = \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ se $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.

→ OGNUNA DI QUESTE MATRICI È INVERTIBILE.

TRANNE $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

→ $M = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot {}^T M$ in quanto le colonne sono ortogonali fra loro ma non hanno norma = 1.

$M^{-1} \in \mathbb{C}$ se $M \in \mathbb{C}$

$$\rightarrow \quad MN = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\delta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha\gamma - \beta\delta & -\delta\alpha - \beta\gamma \\ \beta\gamma + \alpha\delta & -\delta\beta + \alpha\gamma \end{bmatrix} = NM \in \mathbb{C}$$

- 1) il prod. di 2 matrici di $\mathbb{C}$ è una matrice di $\mathbb{C}$
- 2) l'inverso di una matrice $\neq 0$ di $\mathbb{C}$ è una matrice di $\mathbb{C}$ (in part. esiste).
- 3) ogni 2 matrici di $\mathbb{C}$ commutano rispetto il prodotto.

$\Rightarrow (\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo perché le associative e distributive vengono dal prod. di matrici in generale.

$$i^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mathbb{1}$$

$\mathbb{C}$ è sp. vettoriale di dim = 2 su $\mathbb{R}$

con base data da $(\mathbb{1}, i)$

"canonica"

$z \in \mathbb{C} \rightarrow z = a \cdot \mathbb{1} + b \cdot i$

oss: $\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \cong \mathbb{R}$

In particolare possiamo identificare

$\mathcal{L}(\mathbb{1}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{1}, i)$ con $\mathbb{R}$

e scriveremo $z = a + ib$ $a, b \in \mathbb{R}$.

Oss: La costruzione di un campo a partire da $\mathbb{R}$ funziona solo con uno s. vett. di matrici di dim = 2.

Se si prendono matrici 4×4 e si cerca un sottospazio di dim = 4 tale che ogni matrice non nulla sia invertibile $\Rightarrow$ si ottiene un corpo (NON VALE LA COMMUTATIVITÀ).

Def: Dato $z \in \mathbb{C}$ si dice <u>coniugato</u> di z l'elemento $^{T}z := \overline{z}$

$$z = a + ib \Rightarrow \overline{z} := a - ib$$

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Teorema: Il coniugio è un automorfismo di $\mathbb{C}$, cioè $\forall z,w \in \mathbb{C}$: $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

$\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

DIM: Siano z e W le matrici associate a z, w

$\Rightarrow {}^t(ZW) = {}^tW\,{}^tZ = {}^t\bar{Z}\,{}^t\bar{W}$

${}^t(Z+W) = {}^tZ + {}^tW$ □

Teorema

1) $Z = \bar{Z} \iff z \in \mathbb{R}$
2) $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$
3) $i(z - \bar{z}) \in \mathbb{R}$

$Re(z) := \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

$Im(z) := -i\frac{1}{2}(z - \bar{z})$

DIM 1) $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \iff b = 0 \iff \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

2) oss: $z = a + ib \Rightarrow \bar{z} = a - ib$

$\Rightarrow z + \bar{z} = 2a \quad \Rightarrow a = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$

3) $z - \bar{z} = +2ib \quad \Rightarrow (z-\bar{z})\cdot i = -2b$

$b = -\frac{1}{2} i (z-\bar{z})$.

4) $z \cdot \bar{z} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \mathbb{1}$ □

$= a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$

Def: $|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ modulo di z.

$z \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{z^2} = |z|$.

oss: $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$ e dunque tutto torna

Teorema di Ruffini.

Sia $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomio e $x_0 \in \mathbb{K}$ tale che $p(x_0) = 0$.

Allora $\exists\, q(x) \in \mathbb{K}[x]$: $p(x) = (x - x_0)\, q(x)$.

Idea della dimostrazione:

applicare l'algoritmo della divisione con resto fra $p(x)$ e $(x - x_0)$.

$$p(x) = (x - x_0)\, q(x) + r(x)$$

ma $\deg(r(x)) < \deg(x - x_0) = 1 \Rightarrow r(x) = k$

ma allora $p(x_0) = 0 \cdot q(x) + k \Rightarrow k = 0$

□

Teorema fondamentale dell'algebra:

Sia $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ con $\deg p(x) \geq 1$

Allora $\exists\, x_0 \in \mathbb{C}$ tale che $p(x_0) = 0$.

Corollario:

1) Sia $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ con $\deg p(x) \geq 1$

Allora $p(x)$ si fattorizza (si spezza in) in fattori di primo grado.

2) $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ha esattamente $\deg p(x)$ radici in $\mathbb{C}$.

DIM:

1) Sia $\deg p(x) = 1 \Rightarrow p(x) = \alpha x - \beta$ è già fattorizzato in termini lineari

per induzione: supponiamo valga il coroll.

$\forall \hat{p}(x)$ con $\deg \hat{p}(x) \leq n-1$

Sia x_0 radice di $p(x) \Rightarrow$ per Ruffini

$$p(x) = (x - x_0)\, q(x) \text{ con}$$

$$\deg q(x) = \deg p(x) - 1 = n - 1 \qquad \alpha_j \neq 0$$

$\Rightarrow$ per ipotesi induttiva $q(x) = \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha_j x - \beta_j)$

$$\Rightarrow p(x) = (x - x_0) \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha_j x - \beta_j)$$

□

2) contiamo le radici di $p(x)$ con molteplicità.

Oss: Sia $p(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow p(x) = \overline{p}(x)$

ma $\overline{p(x)} = \overline{p}(\bar{x})$ quindi $p(\bar{x}) = \overline{p(x)}$ se $p(x)$ è reale.

Ne segue che se $x_0 \in \mathbb{C}$ è radice di $p(x) \in \mathbb{R}[x]$

$\Rightarrow$ anche $\bar{x}_0$ è radice di $p(x)$.

In generale se $\forall x_0 \in \mathbb{C}$: $p(x_0) = 0 \Leftrightarrow p(\bar{x}_0) = 0$

$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C}$: $\alpha\, p(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Oss 1) Sia $x_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow (x - x_0)(x - \bar{x}_0) \in \mathbb{R}[x]$

$$\| $$

$$x^2 - \underbrace{(x_0 + \bar{x}_0)}_{\text{Re}(\bar{x}_0) \in \mathbb{R}} x + \underbrace{x_0 \bar{x}_0}_{|x_0|^2 \in \mathbb{R}}$$

2) Se $p(x) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow p(x)$ si fattorizza in $\mathbb{R}[x]$ come prodotto di termini di grado 1 e 2.

→ Siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ le radici reali di $p(x)$ e $(z_1, \bar{z}_1) \dots (z_t, \bar{z}_t)$ le radici imm.

$$\Rightarrow p(x) = a \prod_{j=1}^{n} (x - x_j) \cdot \prod_{k=1}^{t} (x - z_k)(x - \bar{z}_k) =$$

$$= a \prod_{j=1}^{n} (x - x_j) \prod_{k=1}^{t} (x^2 - \mathrm{Re}(z_k)x + |z_k|^2)$$

3) Se vale che $p(x_0) = 0 \Leftrightarrow p(\bar{x}_0) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ tutte le radici di $p(x)$ sono coniugate a due a due se imm. o autoconiugate se reali $\Rightarrow$

$$\Rightarrow p(x) = \beta \underbrace{\prod_{j=1}^{n} (x - x_j) \prod_{k=1}^{\epsilon} (x^2 - \mathrm{Re}(z_k)x + |z_k|^2)}_{\in \mathbb{R}[x]}$$

$$\beta \neq 0 \,;\, \beta \in \mathbb{C} \Rightarrow \quad \beta^{-1} p(x) \in \mathbb{R}[x].$$

$\exp(x)$ Reale

$$\exp(x) := \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} x^j \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\exp(z) := \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} z^j \qquad z \in \mathbb{C}$$